Predikátová logika: Axiomatizace, sémantické stromy, identita

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Logika: systémový rámec rozvoje oboru v ČR a koncepce logických propedeutik pro mezioborová studia (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0216, OPVK)

Axiomatizace predikátové logiky

Definice

Hilbertovský kalkul pro klasickou predikátovou logiku sestává ze čtyř axiomatických schémat

- *H1* $\vartheta \to (\chi \to \vartheta)$,
- *H2* $(\vartheta \to (\chi \to \gamma)) \to ((\vartheta \to \chi) \to (\vartheta \to \gamma))$,
- *H3* $(\neg\chi \to \neg\vartheta) \to (\vartheta \to \chi)$,
- *H4* $\forall x \vartheta \to \vartheta^x_t$, *je-li term t substituovatelný za x v* ϑ

plus dvou odvozovacích pravidel:

- *mp* $\vartheta, \vartheta \to \chi / \chi$.
- *gen* $\vartheta \to \chi / \vartheta \to \forall x \chi$, *nevyskytuje-li se x volně v* ϑ

Úplnost a korektnost Hilbertovského kalkulu

Věta o korektnosti: Jestliže ψ je odvoditelná z $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, pak $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Věta o úplnosti: Jestliže $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$, pak ψ je odvoditelná z $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Úplnost a korektnost Hilbertovského kalkulu

Věta o korektnosti: Jestliže ψ je odvoditelná z $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, pak $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Věta o úplnosti: Jestliže $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$, pak ψ je odvoditelná z $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Úplnost a korektnost Hilbertovského kalkulu

Věta o korektnosti: Jestliže ψ je odvoditelná z $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, pak $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Věta o úplnosti: Jestliže $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$, pak ψ je odvoditelná z $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Metoda sémantických stromů

Metoda sémantických stromů slouží k řešení sémantických otázek predikátové logiky. Získáme ji tak, že rozšíříme metodu sémantických stromů výrokové logiky o pravidla pro kvantifikátory.

Negativní pravidla pro kvantifikátory

$$\begin{array}{c} \neg\forall y\varphi \\ | \\ \exists y\neg\varphi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\exists y\varphi \\ | \\ \forall y\neg\varphi \end{array}$$

Pozitivní pravidlo pro obecný kvantifikátor

$$\begin{array}{c} \forall y \varphi \\ | \\ \varphi^y_c \end{array}$$

kde c je nějaké jméno, které se vyskytuje na té větvi, na které pravidlo aplikujeme. Pouze v případě, že se na takové větvi doposud žádné jméno nevyskytlo, představuje c nějaké nově zavedené jméno.

Pozitivní pravidlo pro existenční kvantifikátor

$$\exists y \varphi$$

$$|$$

$$\varphi^y_c$$

kde c je nějaké nově zavedené jméno, které se na větvi doposud nevyskytlo.

Úplnost a korektnost metody sémantických stromů (formulovaná pro pojem vyplývání)

Věta o korektnosti: Jestliže se úplně rozvinutý strom pro formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi$ uzavře na všech větvích, pak $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Věta o úplnosti: Jestliže $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$, pak se úplně rozvinutý strom pro formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi$ uzavře na všech větvích.

Úplnost a korektnost metody sémantických stromů (formulovaná pro pojem vyplývání)

Věta o korektnosti: Jestliže se úplně rozvinutý strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$ uzavře na všech větvích, pak $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Věta o úplnosti: Jestliže $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$, pak se úplně rozvinutý strom pro formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi$ uzavře na všech větvích.

Úplnost a korektnost metody sémantických stromů (formulovaná pro pojem vyplývání)

Věta o korektnosti: Jestliže se úplně rozvinutý strom pro formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi$ uzavře na všech větvích, pak $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Věta o úplnosti: Jestliže $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$, pak se úplně rozvinutý strom pro formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi$ uzavře na všech větvích.

Rozhodnutelnost

Výroková logika je rozhodnutelná. Existuje algoritmus pro řešení sémantických problémů.

Predikátová logika je nerozhodnutelná. Neexistuje algoritmus pro řešení sémantických problémů.

Rozhodnutelnost

Výroková logika je rozhodnutelná. Existuje algoritmus pro řešení sémantických problémů.

Predikátová logika je nerozhodnutelná. Neexistuje algoritmus pro řešení sémantických problémů.

Rozhodnutelnost

Výroková logika je rozhodnutelná. Existuje algoritmus pro řešení sémantických problémů.

Predikátová logika je nerozhodnutelná. Neexistuje algoritmus pro řešení sémantických problémů.

Identita jako predikát

- Stanovíme-li, že $=$ je logický (nikoli mimologický) symbol, musíme fixovat sémantiku tohoto symbolu následujícím způsobem:

  $IV \models t_1 = t_2$ právě tehdy, když v interpretaci I a valuaci V je hodnota termu t_1 identická s hodnotou termu t_2.

Identita jako predikát

- Stanovíme-li, že $=$ je logický (nikoli mimologický) symbol, musíme fixovat sémantiku tohoto symbolu následujícím způsobem:

  $IV \models t_1 = t_2$ právě tehdy, když v interpretaci I a valuaci V je hodnota termu t_1 identická s hodnotou termu t_2.

Příklady

- Nejhlubší jezero na světě je Bajkal.
- Existuje nanejvýš jeden bůh.
- Mars má (právě) dva měsíce.
- Současný král Francie je holohlavý.
- Ke každým dvěma různým bodům existuje právě jedna přímka, která je obsahuje.
- Ke každým třem bodům, které neleží na jedné přímce, existuje právě jedna rovina, která je obsahuje.
- Pokud mají dvě roviny nějaký společný bod, pak mají společný ještě nějaký jiný bod.
- Existují nejméně čtyři různé body, které neleží v jedné rovině.

Příklady

- Nejhlubší jezero na světě je Bajkal.
- Existuje nanejvýš jeden bůh.
- Mars má (právě) dva měsíce.
- Současný král Francie je holohlavý.
- Ke každým dvěma různým bodům existuje právě jedna přímka, která je obsahuje.
- Ke každým třem bodům, které neleží na jedné přímce, existuje právě jedna rovina, která je obsahuje.
- Pokud mají dvě roviny nějaký společný bod, pak mají společný ještě nějaký jiný bod.
- Existují nejméně čtyři různé body, které neleží v jedné rovině.

Příklady

- Nejhlubší jezero na světě je Bajkal.
- Existuje nanejvýš jeden bůh.
- Mars má (právě) dva měsíce.
- Současný král Francie je holohlavý.
- Ke každým dvěma různým bodům existuje právě jedna přímka, která je obsahuje.
- Ke každým třem bodům, které neleží na jedné přímce, existuje právě jedna rovina, která je obsahuje.
- Pokud mají dvě roviny nějaký společný bod, pak mají společný ještě nějaký jiný bod.
- Existují nejméně čtyři různé body, které neleží v jedné rovině.

Příklady

- Nejhlubší jezero na světě je Bajkal.
- Existuje nanejvýš jeden bůh.
- Mars má (právě) dva měsíce.
- Současný král Francie je holohlavý.
- Ke každým dvěma různým bodům existuje právě jedna přímka, která je obsahuje.
- Ke každým třem bodům, které neleží na jedné přímce, existuje právě jedna rovina, která je obsahuje.
- Pokud mají dvě roviny nějaký společný bod, pak mají společný ještě nějaký jiný bod.
- Existují nejméně čtyři různé body, které neleží v jedné rovině.

Příklady

- Nejhlubší jezero na světě je Bajkal.
- Existuje nanejvýš jeden bůh.
- Mars má (právě) dva měsíce.
- Současný král Francie je holohlavý.
- Ke každým dvěma různým bodům existuje právě jedna přímka, která je obsahuje.
- Ke každým třem bodům, které neleží na jedné přímce, existuje právě jedna rovina, která je obsahuje.
- Pokud mají dvě roviny nějaký společný bod, pak mají společný ještě nějaký jiný bod.
- Existují nejméně čtyři různé body, které neleží v jedné rovině.

Příklady

- Nejhlubší jezero na světě je Bajkal.
- Existuje nanejvýš jeden bůh.
- Mars má (právě) dva měsíce.
- Současný král Francie je holohlavý.
- Ke každým dvěma různým bodům existuje právě jedna přímka, která je obsahuje.
- Ke každým třem bodům, které neleží na jedné přímce, existuje právě jedna rovina, která je obsahuje.
- Pokud mají dvě roviny nějaký společný bod, pak mají společný ještě nějaký jiný bod.
- Existují nejméně čtyři různé body, které neleží v jedné rovině.

Příklady

- Nejhlubší jezero na světě je Bajkal.
- Existuje nanejvýš jeden bůh.
- Mars má (právě) dva měsíce.
- Současný král Francie je holohlavý.
- Ke každým dvěma různým bodům existuje právě jedna přímka, která je obsahuje.
- Ke každým třem bodům, které neleží na jedné přímce, existuje právě jedna rovina, která je obsahuje.
- Pokud mají dvě roviny nějaký společný bod, pak mají společný ještě nějaký jiný bod.
- Existují nejméně čtyři různé body, které neleží v jedné rovině.

Příklady

- Nejhlubší jezero na světě je Bajkal.
- Existuje nanejvýš jeden bůh.
- Mars má (právě) dva měsíce.
- Současný král Francie je holohlavý.
- Ke každým dvěma různým bodům existuje právě jedna přímka, která je obsahuje.
- Ke každým třem bodům, které neleží na jedné přímce, existuje právě jedna rovina, která je obsahuje.
- Pokud mají dvě roviny nějaký společný bod, pak mají společný ještě nějaký jiný bod.
- Existují nejméně čtyři různé body, které neleží v jedné rovině.

Axiomy identity

K axiomatickému systému pro predikátovou logiku přidáme následující axiomy:

- R1 $\forall x(x = x)$
- R2 $\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$
- R3 $\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$

plus schéma, které které pro každé n a pro každý n-místný predikát Q obsahuje formuli

- PE $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n((x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \rightarrow$
$$\rightarrow (Q(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow Q(y_1, \ldots, y_n)))$$

Hilbertovský kalkul pro predikátovou logiku obohacený o axiomy identity je korektní a úplný vůči sémantice predikátové logiky s fixovanou interpretací rovnosti.